



Samarqand davlat universitetining Kattaqo'rg'on filiali Aniq va tabiiy fanlar fakulteti 4-bosqich Matematika ta'lim yo'nalishi talabalariga 7-semestr uchun « Funksional Analiz» fanidan yakuniy nazorat savollari

Imtihon shakli: Yozma og'zaki

№	Mavzu	1-QISM	2-QISM	3-QISM	4-QISM	5-qism
1.	Metrik fazolar va ularga misollar. Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar. Izometriya.	Metrik fazoning ta'rifi va misollar.	Metrik fazoda uzluksiz akslantirish ta'rifi va misol	$\rho(x, y) = \cos x - \cos y , x, y \in \mathbb{R}$ metrika bo'ladimi? Metrikaning qaysi sharti bajarilmaydi.	$X = \mathbb{R}^1$. $\rho(x, y) = (x - y)^2$ metrika bo'ladimi? Qaysi metrik shart bajarilmaydi.	$X = \mathbb{R}^1$. $\rho(x, y) = \sin x - \sin y $ metrika bo'ladimi. Qaysi metrika sharti bajarilmaydi.
2.		Metrik fazoda gomeomorfizm ta'rifi va misol	Gyolder tengsizligini isbotlang	Q ni R ning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.	$X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k - y_k ^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$X = \mathbb{R}^2$, $\rho(x, y) = x_1 - y_2 + y_1 - x_2 $ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.
3.		Minkovskiy tengsizligini isbotlang.	Metrik fazoda izometriya ta'rifi va misol	R metrik fazo bo'lishini isbotlang.	$C[a; b]$ metrik fazo bo'lishini isbotlang.	ℓ_2 metrik fazo bo'lishini isbotlang.
4.	Metrik fazolarda yaqinlashishlar. Ochiq va	Metrik fazoda yopiq to'plam ta'rifi va unga misol	Limit nuqta, yakkalangan nuqta ta'riflari va ularga oid misollar	R\Q ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.	Biror bo'sh bo'lmagan X - to'plam va	Shunday metrik fazoga va undagi ikkita $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$ sharlarga misol keltiringki, $r_1 < r_2$ va

	yopiq to'plamlar.				bu to'plamda quyidagicha funksiya $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$ berilgan bo'lsin. Berilgan $d(x, y)$ - funksiya metrika ekanligi isbotlansin.	$B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2)$ bo'lsin.
5.		Metrik fazolarda yaqinlashish ta'rifi va unga doir misol.	Metrik fazolarda zich to'plamlar va ularga doir misollar.	$X = \ell_2, \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^2$ akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$[0,1]$ metrik fazoda $y_n(t) = t^n - t^{2n}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	$C[0,1]$ metrik fazoda $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?
6.		To'plamning yopig'i. Xossalari.	Metrik fazoda ochiq to'plam ta'rifi va unga misol	$[0,1]$ metrik fazoda $x_n(t) = t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	$[0,1]$ metrik fazoda $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi?	$x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t)=0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, ammo $C_1[0,1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi emas. Isbotlang.
7.	To'la metrik fazolar. Metrik fazolarni to'ldirish haqidagi teorema	To'la metrik fazo ta'rifi va unga oid misollar.	Metrik fazoni to'ldirmasi ta'rifi va unga oid misol	$C[a, b]$ fazo to'la metrik fazodir. Isbotlang.	$\rho_1(f, g) = \int_a^b f(x) - g(x) dx, X = C[a, b]$. Bu akslantirishni metrika shartlariga tekshiring.	$X = \ell_2, x = (1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots), y = (0, 0, 0, \dots), \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^2}$. Berilgan metrikaga nisbatan bu elementlar orasidagi masofani toping.
8.	Metrik fazolarda kompakt va nisbiy kompakt to'plamlar.	Kompakt metrik fazo ta'rifi va unga oid misollar	Nisbiy kompakt tushunchasi va unga oid misollar	l_2 fazosida yopiq va chegaralangan, ammo kompakt bo'lmagan to'plamga misol keltiring.	To'plamning chegaralanganligidan, uning nisbiy kompakt bo'lishi kelib chiqadimi? Misol keltiring.	$C[0; 1]$ fazoda $\Phi = \{x_\alpha t = \frac{2\alpha t}{1+\alpha^2 t^2}, \alpha \in (0; \infty)\}$ funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring.

9.	Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbiqlari	Qisuvchi akslantirish ta'rifi va unga oid misollar	Qo'zg'almas nuqta ta'rifi va unga oid misollar	$f(x) = x + \frac{1}{x}$ akslantirish $[1; \infty)$ nurda qisqartiruvchi bo'ladimi?	$f(x) = 4x - 4x^2$ funksiya $[0;1]$ kesmani o'zini-o'ziga akslantirishga tekshiring. Bu akslantirish qisqartiruvchi bo'ladimi?	$A: f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$ akslantirishning $C[0;1]$ fazosida qisqartiruvchi ekanligini ko'rsating va uni qo'zg'almas nuqtasini toping.
10.	Chiziqli fazo ta'rifi va unga misollar. Izomorof fazolar. Chiziqli bog'langanlik. Chiziqli fazo o'lchami.	Chiziqli fazo ta'rifi va unga oid misollar.	Chiziqli fazolarning o'zaro izomorfligi ta'rifi va unga misol	Berilgan fazoda quyidagi elementlar chiziqli bog'lilanganmi? $\mathbb{R}^3: \bar{a} = (1, -2, 4), \bar{b} = (-1, 2, 3), \bar{c} = (1, 1, 0)$.	Chiziqli bog'langanlikka tekshiring: $x_1(t) = 1, x_2(t) = \cos t, x_3(t) = \cos^2 t \in C[0, 2\pi]$.	Chiziqli bog'langanlikka tekshiring: $x_1 = (1, 1, 2), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.
11.		Chiziqli bog'langan elementlar sistemasi ta'rifi va unga misol	Chiziqli fazo o'lchami va unga oid misollar	Chiziqli bog'langanlikka tekshiring: $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.	Chiziqli bog'langanlikka tekshiring: $x_1 = (1, 1, 2), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.	Chiziqli bog'langanlikka tekshiring: $x_1 = (2, 1, 2), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.
12.		Chiziqli bog'lanmagan elementlar sistemasi ta'rifi va unga misol	Cheksiz o'lchamli chiziqli fazo ta'rifi va unga doir misol	$C[a, b]$ chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.	$\mathbb{R}^n$ chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.	$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ekanligini ko'rsating.
13.	Chiziqli fazoning qism fazosi. Chiziqli fazoning faktor fazosi	Chiziqli fazoning qism fazosi ta'rifi va misol	Chiziqli fazoning factor fazosi ta'rifi va misol	Berilgan fazoda quyidagi elementlar chiziqli bog'liqmi? $\mathbb{R}^3: \bar{a} = (1, -2, -1), \bar{b} = (-1, 2, 3), \bar{c} = (1, 1, 0)$.	Quyidagi vektorlar chiziqli erklimi: $\bar{a} = (1, -2, 0), \bar{b} = (-1, 0, 3), \bar{c} = (1, 1, 0)$.	$d = (2, -3, 4)$ vektorni $a = (-1, 2, 0), b = (1, 0, 3), c = (0, -1, 1)$ vektorlar orqali ifodalang.

14 .	Chiziqli funksionallar . Qavariq to'plam va qavariq funksionallar . Xan-Banax teoremasi	Chiziqli fazoda chiziqli funksional ta'rifi va unga oid misol	Qavariq to'plam va qavariq jism ta'riflari va unga oid misol	Funksional chiziqlimi? $f: C[0,1] \rightarrow C, f(x) = \int_0^\pi x(t) \cos t \, dt.$	Funksional chiziqlimi? $f: L_1[0,1] \rightarrow C, f(x) = \int_0^1 e^t x(t) dt.$	$p: C[a,b] \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = \int_b^a x(t) dt$ funksional norma bo'ladimi?
15 .	Chiziqli normalangan fazo ta'rifi va unga misollar. To'la normalangan fazolar. Normalangan fazoning qism fazosi va faktor fazosi.	Chiziqli fazoda qavariq funksional ta'rifi va unga oid misol	Chiziqli fazolarda Xan-Banax teoremasi	$p: C[a,b] \rightarrow R$ va $p(x) = \int_a^b x(t) dt$ bo'lsa p akslantirish qavariq funksional ekanligini isbotlang	$\mathbb{R}^2$ fazoda $p(x,y) = x^2 + y^2$ funksionalni qavariqlikka tekshiring	$\mathbb{R}^2$ fazoda $p(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksionalni qavariqlikka tekshiring
16 .	Evklid fazosi ta'rifi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Misollar.	Chiziqli normalangan fazo ta'rifi va unga oid misollar	To'la normalangan fazo ta'rifi va unga oid misollar	$p: C^{(2)}[a,b] \rightarrow R, p(x) = x(a) + x'(a) + \max_{a \leq t \leq b} x''(t) $ funksional norma bo'ladimi?	$p: C^{(2)}[a,b] \rightarrow R, p(x) = x(a) + x(b) + \max_{a \leq t \leq b} x''(t) $ funksional norma bo'ladimi?	$x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2+t^2} \in C[0;1], n = 1,2,3, \dots$ ketma-ketlik ko'rsatilgan fazoda nolga yaqinlashadimi? Bunda norma $\ x\ = \max_{a \leq t \leq b} x(t) .$
17 .		Evklid fazosi ta'rifi va unga oid misollar	Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi	$E = C[a;b], p(x,y) = \int_a^b e^t x(t)y(t) dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = \mathbb{R}^3, p(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = C[a,b], (x,y) = \int_a^b x^4(t)y^4(t) dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?

18.	Ortogonal normallangan sistema. Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni.	Ortogonal normallangan sistema tushuncha va unga oid misol	Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni	$E = L_2[0,1], x_1(t) = 1, x_2(t) = t$. Chiziqli erklilikka tekshiring va ularni ortogonallashtiring.	$E = R^3, x = (-1,0,1), y = (0,-1,1), z = (2,0,-1)$. Chiziqli erklilikka tekshiring va ularni ortogonallashtiring.	$E = R^3, x = (0,-1,1), y = (2,0,-1)$. Chiziqli erklilikka tekshiring va ularni ortogonallashtiring.
19.	Bessel tengsizligi va Parseval tengligi. Yopiq ortogonal sistema.	Bessel tengsizligi	Parseval tengligi. Yopiq ortogonal sistema.	$C_2[-\pi; \pi]$ separabel Evklid fazosida $\{\phi_n(t) = \pi^{-0,5} \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ sistema ortonormal bo'ladimi?	$C_2[-\pi; \pi]$ separabel Evklid fazosida $\{\phi_n(t) = \pi^{-0,5} \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ sistema to'la bo'ladimi?	$C_2[-\pi; \pi]$ Evklid fazosida $\{\phi_n(t) = \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang.
20.	To'la Evklid fazosi. Riss-Fisher teoremasi. Evklid fazosining xarakteristik xossalari.	To'la Evklid fazosi ta'rifi va unga oid misollar	Riss-Fisher teoremasi.	$EE = \mathbb{R}^2, (x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = \mathbb{R}^2, (x, y) = x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$L_2[-\pi; \pi]$ Evklid fazosida $\phi_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang.
21.	Hilbert fazolari. Izomorfizm haqidagi teorema. Hilbert fazolarining qism fazosi.	Hilbert fazo ta'rifi va unga oid misollar	Separabel Hilbert fazolarining o'zaro izomorfligi haqidagi teorema	$E = C[a, b], (x, y) = \int_a^b x^2(t)y^2(t)dt$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = R^3, \rho(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 - 7x_3y_3$ skalyar ko'paytmani aniqlaydimi?	$E = C[a; b], p(x, y) = \int_a^b e^t x(t)y(t)dt$ ifoda skalyar kopaytma bo'ladimi?
22.	Ortogonal to'ldiruvchi. Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi	Hilbert fazosida ortogonal to'ldiruvchi tushunchasi	Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi tushunchasi	$E = R^3, (x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 $ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?	$E = R^3, \rho(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 $ skalyar ko'paytmani aniqlaydimi?	$E = \ell_2, (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k y_k}{k}$ ifoda skalyar ko'paytma bo'ladimi?

23 .	Chiziqli uzluksiz operatorlar va ularga misollar	Chiziqli operatorni ta’rifi va unga misollar	Chiziqli operatorning uzluksizligi ta’riflari va unga misollar	$A: C[-2,2] \rightarrow C[-2,2], (Ax)(t) = tx(t)$ operatorni chiziqlilikka tekshiring.	$A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], (Af)(x) = \int_0^1 xtf(t)dt$ operatorni chiziqlilikka tekshiring.	$A: C[-3,3] \rightarrow C[-3,3], (Ax)(t) = te^tx(t)$ operatorni chiziqlilikka tekshiring.
24 .	Chiziqli chegaralangan operatorlar va ularning xossalari. Chiziqli chegaralangan operatorning normasi.	Chiziqli chegaralangan operator ta’riflari	Chiziqli chegaralangan operatorning normasi haqidagi teorema	Operatorni chegaralanganlikka tekshiring: $A: C[0,\pi] \rightarrow C[0,\pi], (Ax)(t) = (1 + \sin t)x(t).$	$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Af)(x) = (x^2 + 1)f(x)$ operatorni chegaralanganlikka tekshiring.	$A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], (Af)(x) = \int_0^1 xtf(t)dt$ operatorni chiziqlilikka va chegaralanganlikka tekshiring.
25 .	Operatorning normasi. Operatorlarning yig’indisi va ko’paytmasi	Chiziqli operatorlarning yig’indisi va ko’paytmasi ta’riflari	Chiziqli uzluksiz operatorning chegaralangan bo’lishi haqidagi teorema	Quyidagi operatorni chegaralanganlikka tekshiring: $A: X = C[0,1], (Ax)(s) = \int_0^1 stx(t) dt.$	$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Af)(x) = (x^2 + 12)f(x)$ operatorni chegaralanganlikka tekshiring.	Operatorni chegaralanganlikka tekshiring: $A: C[0,\pi] \rightarrow C[0,\pi], (Ax)(t) = (1 - \sin t)x(t).$
26 .	Normalangan fazolarda chiziqli uzluksiz funkcionallar. Xan-Banax teoremasi.	Normalangan fazolarda chiziqli uzluksiz funkcionallar ta’riflari	Chiziqli normalangan fazolarda Xan-Banax teoremasi	Funksional chiziqlimi? $f: C[0,1] \rightarrow C, f(x) = \int_0^\pi x(t) \cos t dt$	Funksional chiziqlimi? $f: C_{[0,1]} \rightarrow C, f(x) = \int_0^1 t^2 x(t) dt.$	Funksional chiziqlimi? $f: R^3 \rightarrow R, f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$
27 .	Qo’shma fazo ta’rifi va unga misollar	Qo’shma fazo ta’rifi va unga misollar	Qo’shma fazolarga misollar	$L_p[a,b]$ fazoga qo’shma fazoni toping	$L_2[a,b]$ fazoga qo’shma fazoni toping	l_p fazoga qo’shma fazoni toping
28 .	Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi. Operatorlarni	Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosining to’laligi haqidagi teorema	Operatorlarning tekis yaqinlashishiga misol keltiring	Operator chiziqli uzluksizmi? $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = x'(t).$	Operator chiziqli uzluksizmi? $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], (Ax)(t) = t^{-2}x(t).$	Operator chiziqli uzluksizmi? $A: L_2[0,\infty) \rightarrow L_2[0,\infty), (Ax)(t) = t^2x(t).$

29 .	ng tekis, kuchli va kuchsiz yaqinlashishlari.	Operatorlarning tekis, kuchli va kuchsiz yaqinlashishlari ta'riflari	Operatorlarning kuchli va kuchsiz yaqinlashishiga misol keltiring	$A_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad A_n x = (0, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma'noda yaqinlashmasligini ko'rsating.	$A: L_2[-0,5; 0,5] \rightarrow L_2[-0,5; 0,5], \quad A_n f = x^n f(x)$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashishini ko'rsating.	$A_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad A_n x = (0, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchsiz ma'noda yaqinlashishini ko'rsating.
30 .	Banax-Shtenxaus teoremasi	Banax-Shtenxaus teoremasi	Banax-Shtenxaus teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi misol keltiring	Operator uzluksizmi? $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad (Ax)(t) = x'(t).$	Operator uzluksizmi? $A: L_2(R) \rightarrow L_2(R), \quad (Ax)(t) = t^{-0,5} x(t).$	$A_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad A_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shtenxaus teoremasi shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.